Du cube au cube SOMA

Yolande Noël, Congrès SBPMef 2008

1 Description du matériel

Un nombre suffisant (une cinquantaine par exemple) de petits cubes, tous de même dimension (2 cm par exemple), découpés dans du matériel de récupération (bois, frigolite). Des cubes peuvent aussi être collés à partir de développements dessinés dans du carton mais ce matériel ne présenterait pas la même résistance à l'usage ! Il présente par contre l'occasion d'organiser un travail collectif sur les développements du cube ... ce qui serait une première activité non décrite ici.

2 Assemblages de petits cubes en un cube plus grand

2.1 Première partie

De combien de petits cubes faut-il disposer pour pouvoir assembler des petits cubes en un cube plus grand ?

Selon leur niveau de perception, les élèves passeront plus ou moins vite de la réalisation concrète des assemblages au pronostic des besoins par simple calcul. Cette activité relie l'aspect numérique à la perception spatiale, aidant ainsi à la fixation de ce que la multiplication d'une longueur par a entraîne la multiplication du volume par a^3, en particulier : 1 dm^3=1 000 cm^3, etc.

Des questions supplémentaires sont possibles pour les élèves les plus rapides. Exemple : *Je ne dis pas de combien de petits cubes je dispose mais c'est un nombre de quatre chiffres dont le chiffre des unités est 3 et j'utilise exactement tous mes petits cubes pour former le grand. Quel est ce nombre ?*

2.2 Visualisation dans l'espace, suite

L'activité peut démarrer à deux niveaux, selon que le nombre de petits cubes est 8 ou 27.

On souhaite assembler 8 (respectivement 27) petits cubes non coloriés en un cube dont l'extérieur sera entièrement colorié. Comment s'organiser pour user le moins de couleur possible ?

Comme dans l'activité précédente, différents niveaux sont atteints par une manipulation concrète plus ou moins importante ainsi que par le volume visé. Atteindre le stade où tout le matériel est préparé (couleur ou gommettes sur les faces adéquates) **AVANT** tout assemblage relève d'une bonne visualisation spatiale.

Un niveau supérieur encore est atteint si on recheche

comment colorier 8 petits cubes en utilisant deux couleurs différentes (ou de gommettes de couleurs différentes) de manière à pouvoir assembler les huit cubes en un cube $2 \times 2 \times 2$ de deux manières différentes :
– un cube $2 \times 2 \times 2$ dont l'extérieur est entièrement rouge,
– un cube $2 \times 2 \times 2$ dont l'extérieur est entièrement bleu.
De manière analogue, comment colorier 27 petits cubes en utilisant trois couleurs de manière à pouvoir assembler les vingt-sept cubes en un grand cube $3 \times 3 \times 3$ de trois manières différentes :
– un cube $3 \times 3 \times 3$ dont l'extérieur est entièrement rouge,
– un cube $3 \times 3 \times 3$ dont l'extérieur est entièrement bleu,
– un cube $3 \times 3 \times 3$ dont l'extérieur est entièrement jaune.

Voici par exemple une analyse des besoins dans le cas des 27 cubes : il faut disposer de 54 (6×9) petites faces de chacune des trois couleurs, soit de 162 (3×54) petites faces à colorier. Or, 27 petits cubes donnent 162 (27×6) faces. Ainsi, toutes les faces doivent être coloriées. Imaginons le grand cube rouge : il faut que le petit cube situé en son centre n'ait aucune face rouge. Il faut donc prévoir un petit cube bicolore :

– trois faces ayant un sommet commun peintes en bleu,
– les trois autres faces peintes en jaune.

Toujours pour ce grand cube rouge, il faut
– 6 petits cubes ayant une seule face rouge,
– 12 petits cubes ayant deux faces rouges avec une arête commune,
– 8 petits cubes ayant trois faces rouges avec un sommet commun.

Le rôle analogue des trois couleurs conduit au coloriage de trois petits cubes bicolores (décrits dans les trois premières colonnes du tableau ci-contre), etc.

Nombre de cubes	1	1	1	3	3	3	3	3	3	6
Rouge		3	3	3	3	2	2	1	1	2
Bleu	3		3	2	1	3	1	2	3	2
Jaune	3	3		1	2	1	3	3	2	2

3 Le cube SOMA

L'histoire du matériel créé par le Danois Piet Hein [6] relève d'une réalité ... mêlée sans doute d'une part de légende. Admirons le génie de ce Danois qui invente un matériel aussi riche alors qu'il suit une conférence sur un tout autre sujet et qui en est ensuite tellement imprégné qu'il lui attribue le nom de SOMA, faisant référence à la drogue évoquée par Aldous Huxley dans « Le Meilleur des Mondes ». Notre collègue lorrain François Drouin, lui aussi tombé dans la marmite, [1], [5], [4], [3], [7], [2], nous a procuré la matière et les illustrations qui suivent. N'oublions pas les amateurs d'origami [9] !

Le matériel est commercialisé par plusieurs éditeurs. Nous préférons sa réalisation à partir de notre stock de petits cubes : la démarche est fort riche pour nos élèves du premier degré !

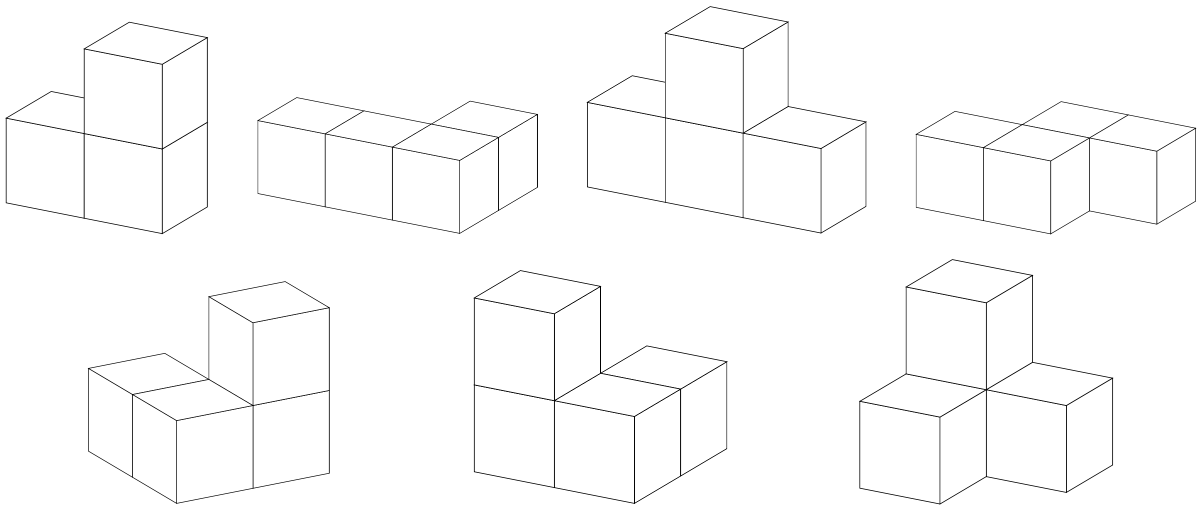
3.1 Première étape

Manipuler les petits cubes pour obtenir des assemblages différents que l'on peut obtenir en utilisant 2 cubes, en utilisant 3 cubes, en utilisant 4 cubes. En rassemblant les trouvailles, l'analyse met en lumière l'orientation dans le plan et dans l'espace, ce qui conduit à discerner les six « assemblages différents » de quatre petits cubes qui ne sont pas des parallélipipèdes.

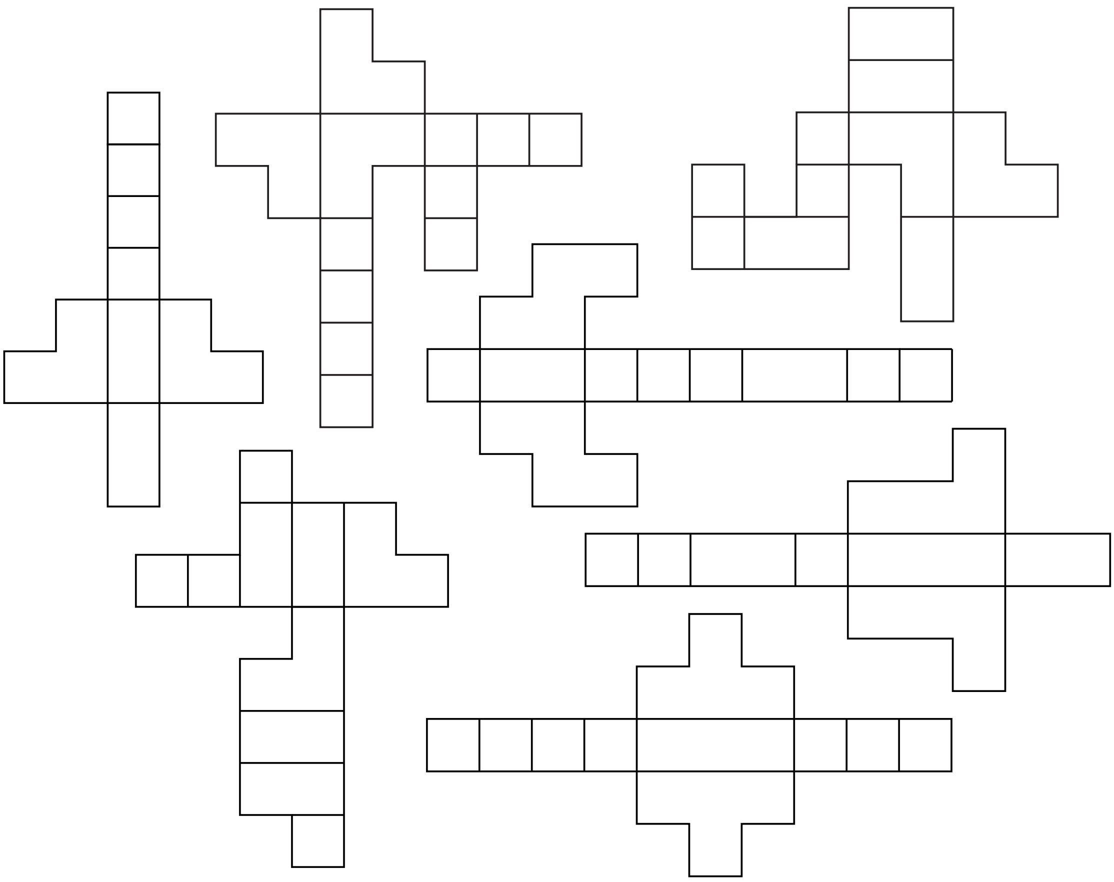
3.2 Deuxième étape : construire le matériel

Dans la suite, nous nous occupons de sept pièces : l'unique assemblage de trois petits cubes qui n'est pas un parallélipipède et les six assemblages « non–parallélipipèdes différents » de quatre petits cubes découverts ci-dessus.

Un peu de colle permet de construire les sept blocs dont voici une représentation tirée de [2] :



Des développements de ces sept solides sont tirés de la même source :



Bizarre : il faut exactement 27 petits cubes pour réaliser les sept pièces. . . devinez-vous la suite ?

3.3 Des assemblages

3.3.1 Et voici la réponse à la question :

en utilisant les sept pièces, construire un cube. (LE cube SOMA !).

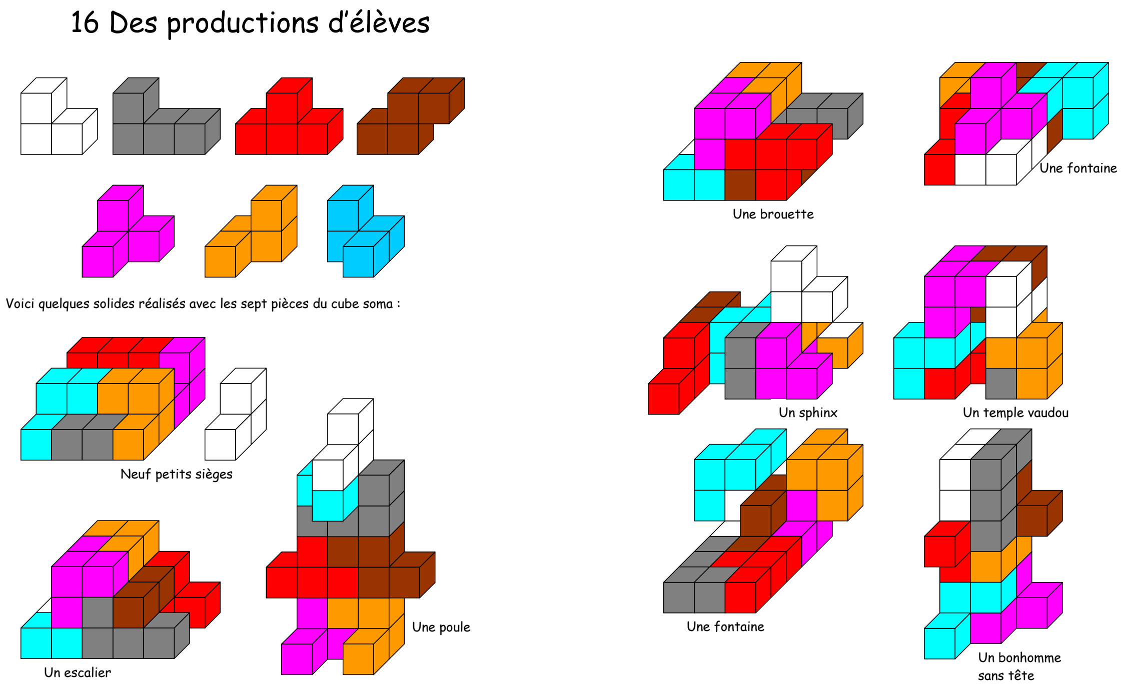
Comme dans les activités précédentes, des manipulations concrètes, des lectures de schémas présentant des solutions, des représentations sur papier d'assemblages réalisés constituent des étapes de niveaux très variés. Le coloriage des pièces peut aider !

Dans [3], une solution est progressivement et très clairement élaborée, des pistes de recherche sont proposées dans [7] et dans [8] (voir par exemple le fichier « 16 soma et paves.doc »)

3.3.2 Des suggestions plus ouvertes sont possibles

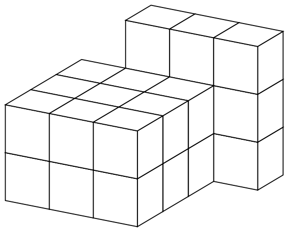
Construire des parallélipipèdes en n'utilisant pas nécessairement les sept pièces, construire un solide tout à fait librement, construire un solide qui n'est pas un parallélipipède mais qui peut être décrit comme une réunion de deux parallélipipèdes, ...

Des exemples de constructions libres obtenues par nos collègues français sont accessibles dans la publication [3] et sur [8] . À titre d'exemple, voici le contenu du fichier « 16 productions eleves.doc ».

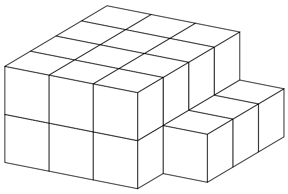


Le site [8] est très riche en petits documents montrant des résultats de travaux d'élèves.

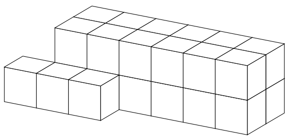
Une autre exploitation de ces assemblages de parallélipipèdes consiste à pratiquer des calculs de volume de manière indirecte : en introduisant le repérage d'un parallélipipède par ses trois dimensions. La description de l'assemblage réalisé nécessite alors sa décomposition. Voici un extrait de [2]



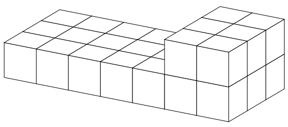
$27 = 3 \times 3 \times 2 + 3 \times 3 \times 1$



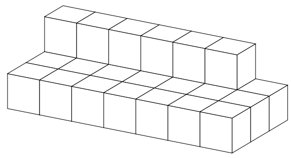
$27 = 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 1 \times 1$



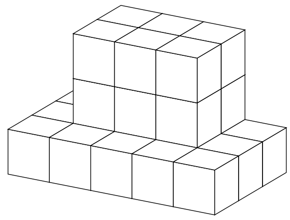
$27 = 6 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1$



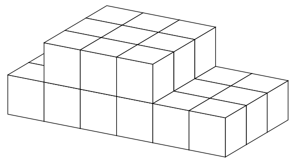
$27 = 7 \times 3 \times 1 + 3 \times 2 \times 1$



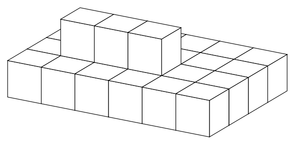
$27 = 7 \times 3 \times 1 + 6 \times 1 \times 1$



$27 = 5 \times 3 \times 1 + 3 \times 2 \times 2$



$27 = 6 \times 3 \times 1 + 3 \times 3 \times 1$



$27 = 6 \times 4 \times 1 + 3 \times 1 \times 1$

D'autres exemples sont accessibles sur le site lorrain [8]. Voir par exemple le fichier « 16 Soma et paves.doc » ou le fichier « 16 Pour $1 \times 3 \times 7 + 1 \times 2 \times 3$ »Voir aussi la publication de l'APMEP [3].

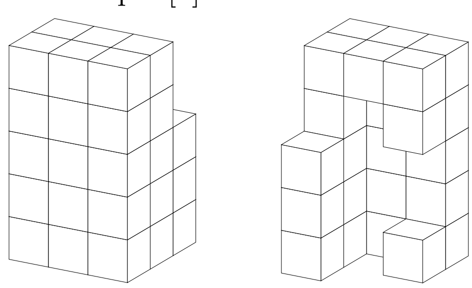
3.3.3 Jouer avec le « vu » et le « caché »

Des assemblages moins réguliers comme celui dont deux vues (avant et arrière) sont présentées ci-dessous ouvrent une nouvelle activité nécessitant une bonne représentation spatiale. À partir d'assemblages concrets vus sous un angle bien choisi ou d'une représentation plane de tels assemblages, peut-on déterminer le nombre de petits cubes assemblés ?

Sans pouvoir prendre l'assemblage en main, sans pouvoir changer d'angle de vue, concilier deux faits contradictoires :

– à gauche : l'assemblage semble, à première vue, constitué de plus de 27 petits cubes (39 peut-être ?)
– l'assemblage est obtenu en utilisant exactement les sept blocs du cube SOMA. La vue de droite fait apparaître des trous.

Voir par exemple [2].



Le même défi peut être proposé à partir d'un assemblage ou d'une représentation plane d'un assemblage pour lequel le nombre de petits cubes est inconnu. Les élèves s'étonnent de l'impossibilité de déterminer avec certitude le nombre de petits cubes assemblés ... Peut-on trouver le minimun ... le maximum ?

Références

[1] Dominique Boggini et François Drouin, *Autour du cube SOMA*, IREM de Lorraine, 1995.

[2] F. Drouin, *Le cube* SOMA, Math-Jeunes, **117 S**, 6–9, 2007.

[3] APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), Jeux 5 *Des activités mathématiques au collège*, 19–28, 2003.

[4] François Drouin, *Les 70 ans du cube* SOMA, bulletin APMEP, **461**, 725–729, 2005

[5] François Drouin, *Le cube* SOMA*, un septuagénaire bien actif dans nos classes !!!*, bulletin APMEP, **471**, 581–582, 2007

[6] `fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM`

[7] François Drouin, *Des cubes accolés*, Math-Jeunes Junior **113J**, 12–14, 2006.

[8] `http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep`, (ce site devrait être remplacé prochainement par `http:/apmeplorraine.free.fr`).

[9] `http://dev.origami.com/images_pdf/soma.pdf`

Des adresses utiles

François DROUIN IUFM (Institut de Formation des Maîtres) de Lorraine à Metz.
adresse personnelle : 2 allée du Cerisier F 55300 Chauvoncourt.
`Francois.Drouin@ac-nancy-metz.fr`

APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), 26, rue Duméril, F 75013 Paris ,
`http://www.apmep.asso.fr`

SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française), 22 rue du Onze Novembre, B 7000 Mons, `http://www.sbpm.be`

Yolande NOËl, rue de la Culée, 86, B 6927 Resteigne,
`yolande@conifere.be`